数理解析研究所講究録
117巻 1971年 59-62

ある発展方程式の解の構成について

神大 理　菊池紀夫

Ω は m 次元ユークリッド空間 R^m の有界な開集合とし，E は Ω で定義され値を R^m にとる二乗可積分関数全体の集合 $L^2(\Omega)$ のヒルベルト部分空間とする。つぎの (1), (2) を仮定する。

(1) つぎの性質をもつ $\{\lambda_n\} \subset R$, $\{g_n\} \subset E$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在する。

イ) $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \leqq \cdots \to \infty \quad (n \to \infty)$,

ロ) $g_n(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0$, $\{g_n(x)\}$ は Ω の上の連続関数列で，E の完全正規直交系である。

線型閉作用素 A をつぎのように定義する。

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in E;\ u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \alpha_n^2 < +\infty\},$$

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n g_n, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n \in \mathcal{D}(A).$$

(2) $C > 0$, $0 < \alpha < 1$ が存在して

$$|u(x) - u(y)| \leqq C\|Au\| |x-y|^{\alpha}, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

がなりたつ。ただし，$\|u\|$ は u の $L^2(\Omega)$ ノルムである。

E 上の発展方程式のコーシー問題

$$du(t)/dt = -A\,u(t) + f(t),\quad t \in I = [0, T],$$
$$u(0) = 0$$

の解の構成を考える。ただし，$f(t) \in \mathcal{D}(A)$ は t の連続関数とする。

$f(t)$ が t に関係しないときを最初考える。I を N 等分する。

$$D:\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$
$$h = \delta(D) = T/N .$$

$\{u_k\}$ $(k = 0, 1, \cdots, N)$ を帰納的につぎのように定める。

$$u_0 = 0,$$
$$(u_k - u_{k-1})/h = -A\,u_k + f,$$
$$\therefore (1 + hA)\,u_k = u_{k-1} + hf .$$

このような $u_k \in \mathcal{D}(A)$ があるものとすれば，仮定(1)により

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} g_n$$

とあらわされるから

$$\alpha_n^{(k)} = \{(1 + h\lambda_n)^k - 1\} f_n / h\lambda_n (1 + h\lambda_n)^k$$

となり，A が閉作用素であることに注意すれば，この u_k が上の方程式をみたすものである。また，評価

$$\|A\,u_k\| \leqq \|f\|,\quad \|A\,u_{k+1} - A\,u_k\| \leqq h\|f\|$$

がなりたつ。分割 D に対応して，関数 $\varphi_D(t,x)$, $\psi_D(t,x)$ を

$$\varphi_D(t,x) = \frac{t_{k+1}-t}{h} u_k(x) + \frac{t-t_k}{h} u_{k+1}(x),$$
$$\psi_D(t,x) = u_{k+1}(x), \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

と定義し，E の元と考えるときには，$\varphi_D(t)$, $\psi_D(t)$ と書く。

さて，解の構成を試みる。$\{D_n\}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \delta(D_n) = 0$$

なる分割列とし，$\varphi_{D_n}(t,x)$, $\psi_{D_n}(t,x)$ を簡単に，$\varphi_n(t,x)$, $\psi_n(t,x)$ と書くことにする。まず，$\{\varphi_n(t)\}$ が E で正規族になることをみる。仮定(2)により

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leqq C\|Au_k\|\cdot|x-y|^\alpha$$

がなりたつから

$$|\varphi_n(t,x) - \varphi_n(t,y)| \leqq C\|f\|\cdot|x-y|^\alpha$$

となり，$t \in I$ を固定したとき，$\{\varphi_n(t)\}$ は E のコンパクト集合に属し

$$\|D_t^+\varphi_n(t)\| \leqq 2\|f\|$$

であるから，$\{\varphi_n(t)\}$ は E で正規族になる。同じように考えて $\{D_t^+\varphi_n(t)\}$ も E で正規族になっている。

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = \varphi(t),$$
$$\lim_{n\to\infty} D_t^+\varphi_n(t) = d\varphi(t)/dt, \quad t \in I$$

と仮定できる。作り方から

$$D_t^+\varphi_n(t) = -A\psi_n(t) + f, \quad t \in I$$

であり，A が閉作用素であるから

$$d\varphi(t)/dt = -A\varphi(t) + f, \quad t \in I$$

$$\varphi(0) = 0$$

がなりたつ。$f(t)$ が t の連続関数のときは，$f(t)$ を階段関数で近似することにより，解を構成することができる。